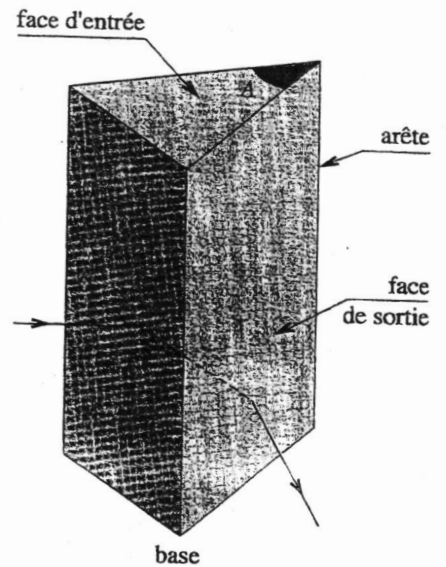


## Présentation du prisme

Du point de vue optique, et dans le cadre d'une utilisation en spectrométrie, le prisme (*doc. 1*) correspond à un dièdre d'angle  $A$ , formé de l'association de deux dioptries plans air/verre et verre/air (les faces utiles du prisme). L'intersection des faces utiles constitue l'arête du prisme. La troisième face est la base du prisme. Nous noterons  $n$  l'indice du verre. Les rayons lumineux envoyés sur le prisme se réfractent successivement sur ses deux faces.



## 2 Déviation de la lumière par un prisme

Nous restreindrons notre étude à des rayons lumineux incidents dans un plan orthogonal à l'arête, plan de section principale.

La loi de DESCARTES, selon laquelle le rayon réfracté est dans le plan d'incidence, permet d'affirmer que les rayons lumineux transmis sont dans ce même plan.

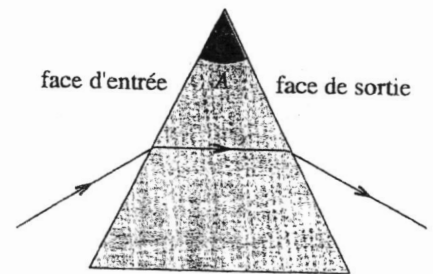
### 2.1. Angle de déviation

Le *document 2* représente le cheminement d'un rayon de ce type dans un plan de coupe (plan d'incidence) perpendiculaire à l'arête du prisme.

Nous identifions sur le schéma les angles  $i, r, r', i', A$  et  $D$  angle de déviation.

Les orientations des angles ont été choisies pour que les valeurs des angles  $i, i', r, r'$  et  $D$  soient positives.

Dans les conditions « normales » d'utilisation, ces angles sont toujours positifs avec ces orientations.



Doc. 1. Faces utiles d'un prisme.

### 2.2. Relations fondamentales

Les lois de SNELL-DESCARTES imposent les deux relations :

$$\sin i = n \sin r \quad (1),$$

$$\sin i' = n \sin r' \quad (2).$$

Nous obtenons, par lecture du *document 2*, les deux relations supplémentaires :

$$A = r + r' \quad (3)$$

(angles à côtés perpendiculaires et somme des angles du triangle  $II'M'$  égale à  $\pi$ ),

$$D = i + i' - r - r' = i + i' - A \quad (4)$$

(somme des angles du triangle  $I'IM$  et relation (3)).

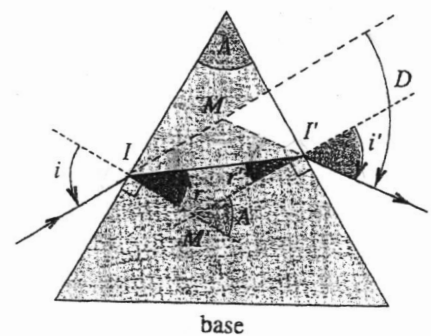
### 2.3. Condition d'émergence

L'indice  $n$  du verre composant le prisme est supérieur à l'unité dans le domaine visible : l'angle de réfraction existe donc toujours. Le rayon pénètre dans le prisme quel que soit son angle d'incidence.

• Angle de réfraction limite

On appelle angle de réfraction limite ou angle de réflexion totale, l'angle  $A$  tel que :

$$\sin A = \frac{1}{n}.$$



Doc. 2. Cheminement d'un rayon à travers le prisme. Dans les conditions normales d'utilisation, les angles sont tous positifs.

## MEMO PRISME

### • Émergence

Pour  $i$  variant de  $0$  à  $+\frac{\pi}{2}$ , l'angle de réfraction  $r$  est inférieur à  $\Lambda$ . Pour que le rayon émerge du second dioptré plan, il faut que  $r'$  reste dans le domaine  $[-\Lambda, +\Lambda]$ , donc  $r = A - r'$  doit rester dans l'intervalle  $[A - \Lambda, A + \Lambda]$ . Il existe des rayons émergents si les inégalités  $-\Lambda \leq r \leq +\Lambda$  et  $A - \Lambda \leq r \leq A + \Lambda$  sont compatibles (doc. 3). L'angle du prisme étant par nature positif, ces intervalles sont non disjoints si et seulement si  $A - \Lambda \leq +\Lambda$ , avec  $\sin \Lambda = \frac{1}{n}$ .

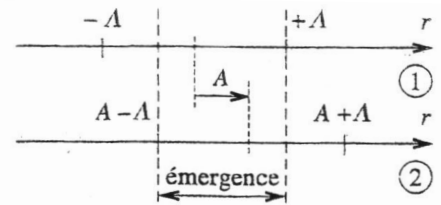
**Il y a toujours réflexion totale si  $A > 2\Lambda$ ,  $\Lambda$  étant l'angle de réfraction limite sur la face d'entrée.**

Pour un prisme d'indice  $n$  égal à  $1,5$ , l'angle de réfraction limite est  $\Lambda \approx 42^\circ$ ; il faut utiliser des prismes d'angle  $A \leq 84^\circ$ .

Au laboratoire, nous disposons souvent de prismes dont l'angle vaut environ  $60^\circ$ . Si l'angle d'incidence est tel que  $\sin i_0 = n \sin (A - \Lambda)$ , avec  $i_0 = 28^\circ$  pour  $n = 1,5$ , le rayon émergent est rasant; s'il lui est inférieur, il y a réflexion totale (doc. 4).

Lorsque  $A \leq 2\Lambda$ , le rayon émerge du prisme si  $i_0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}$ .

Ce résultat a une conséquence pratique qu'il faut garder à l'esprit : nous devons éclairer le prisme de façon suffisamment oblique pour espérer voir la lumière ressortir par la face attendue.

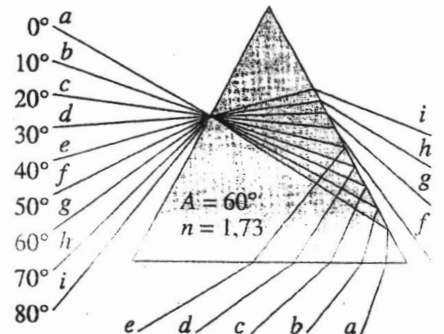


**Doc. 3. Domaine de variation de  $r$  pour qu'un rayon émerge du prisme.**

① domaine de variation de  $r$  à la traversée de la face d'entrée ;

② domaine de variation de  $r' - A = r$  pour qu'un rayon traverse la face de sortie.

angle d'incidence



**Doc. 4. Pour une longueur d'onde donnée, tracé des rayons en fonction de l'angle d'incidence pour :  $n = 1,73$  ;  $A = 35^\circ$ ,  $A_{\text{limite}} = 70^\circ$  et  $i_0 = 27^\circ$ .**

# Application 1

Soit un prisme d'angle au sommet  $A = 60^\circ$  et d'indice  $n = 1,732$ .

- 1) Calculer l'angle limite  $i_0$  pour ce prisme.
- 2) Calculer la déviation du rayon, ainsi que l'angle d'incidence, lorsque les rayons incident et émergent sont symétriques par rapport au plan bissecteur du prisme.

1)  $\sin i_0 = n \sin (A - \Lambda)$ , avec  $\sin \Lambda = \frac{1}{n}$ , soit  $\Lambda = \arcsin \frac{1}{n} = 35,3^\circ$ , d'où  $i_0 = 46,4^\circ$ .

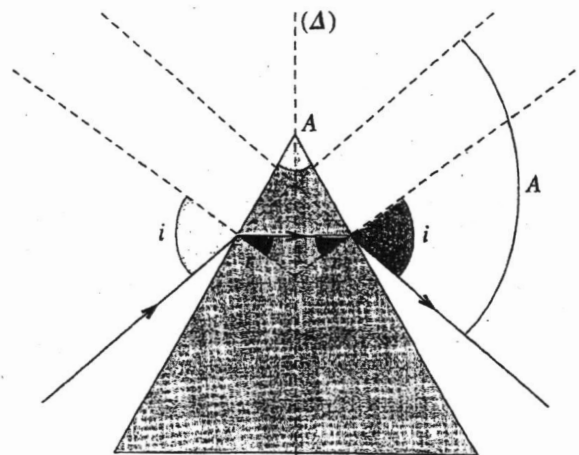
2) Les relations dans le prisme (doc. 5) permettent d'écrire  $i = i' = \frac{A + D}{2}$  et  $r = r' = \frac{A}{2}$ ; d'où :

$$\sin \left( \frac{A + D}{2} \right) = n \sin \left( \frac{A}{2} \right).$$

Sachant que  $\frac{A}{2} = 30^\circ$ ,  $\sin \left( \frac{A + D}{2} \right) = \frac{n}{2}$ , soit :

$$\frac{A + D}{2} = 60^\circ, \text{ d'où } D = 60^\circ \text{ et } i = 60^\circ.$$

Les valeurs utilisées dans cette application sont très voisines de celles rencontrées en manipulation.



**Doc. 5. La figure est symétrique par rapport à  $\Delta$ , plan bissecteur du prisme.**

Le cas de réflexion totale peut aussi être recherché pour éviter l'utilisation de miroirs trop fragiles. Les jumelles à prismes, qui sont des lunettes terrestres, voient ainsi leur encombrement (distance objectif-oculaire) réduit par l'utilisation de prismes à réflexion interne totale. Ils sont associés de façon à rendre leurs arêtes orthogonales et donnent un retournement de 180° de l'image (doc. 6). Celui-ci compense le grossissement négatif (image renversée) de la lunette obtenue par l'association de deux lentilles convergentes.

## 2.4. Variations de $D$ en fonction de $n$

Pour un prisme donné, d'angle  $A$  et d'indice  $n$ , nous pouvons, pour un angle d'incidence  $i$ , calculer  $r$ , puis  $r'$ ,  $i'$  et finalement  $D$ .

Considérons  $A$  et  $i$  constants. L'angle  $A$  du prisme et l'incidence  $i$  étant donnés, la relation (1) montre que si  $n$  croît,  $r$  diminue. Or  $A = r + r'$ , donc  $r'$  et  $i'$ , d'après (2) augmentent. La relation (4) montre alors que :

**La déviation croît avec l'indice du prisme.**

L'indice du prisme, donc la déviation  $D$ , dépend de la longueur d'onde : *le prisme disperse la lumière*. Les composantes spectrales de la lumière du faisceau incident étant séparées, la lumière pourra être analysée.

Pour un prisme en verre, dans le domaine visible, l'indice est une fonction décroissante de la longueur d'onde,  $D$  aussi (doc. 7 et 8).

**La déviation croît du rouge au violet dans le domaine visible.**

## 2.5. Variation de $D$ en fonction de $i$

### 2.5.1. Recherche des extrêmes de déviation en utilisant les propriétés de symétrie

Rappelons que pour  $A$  variant de 0 à  $2A$ , le prisme dévie la lumière vers sa base. Nous admettons que  $A$  et l'indice  $n$  (source monochromatique) sont constants. En utilisant le principe de retour inverse de la lumière, nous remarquons que les angles d'incidence  $i$  et  $i' = D + A - i$  donnent le même angle de déviation  $D$ . À une valeur de  $D$  correspondent donc deux valeurs de l'angle d'incidence, sauf dans le cas  $i = i' = \left(\frac{D+A}{2}\right)$  qui correspond à un extremum de  $D$  (doc. 9).

### 2.5.2. Étude de $D(i)$

Écrivons la différentielle  $dD$  de l'angle de déviation.

Les relations de base (1), (2), (3), (4) nous donnent, en les différentiant :

$$\cos i \, di = n \cos r \, dr \quad (1'), \quad \cos i' \, di' = n \cos r' \, dr' \quad (2'),$$

$$0 = dr + dr' \quad (3'), \quad dD = di + di' \quad (4').$$

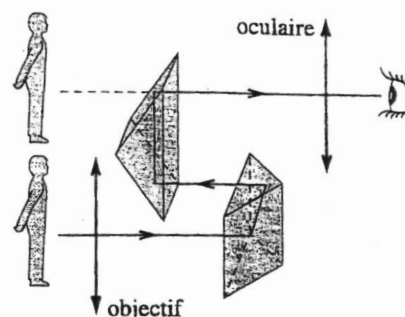
En éliminant  $di'$  et  $dr'$ , nous obtenons :

$$dD = \left(1 - \frac{\cos i \cdot \cos r'}{\cos i' \cdot \cos r}\right) di.$$

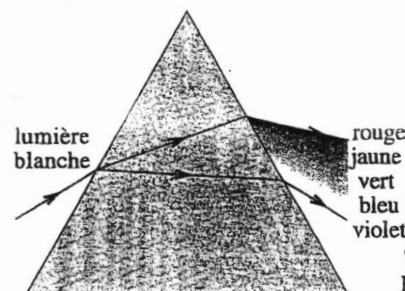
Cherchons alors une valeur de  $i$  rendant la déviation stationnaire, c'est-à-dire  $\frac{dD}{di} = 0$ . Nous obtenons l'égalité :

$$\cos^2 i \cos^2 r' = \cos^2 i' \cos^2 r,$$

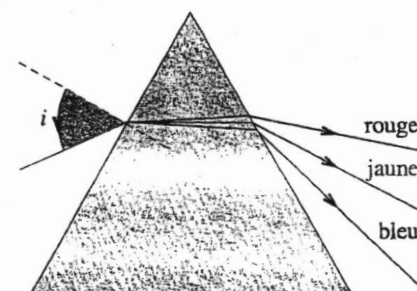
soit :  $(1 - \sin^2 i)(1 - \sin^2 r') = (1 - \sin^2 i')(1 - \sin^2 r)$ .



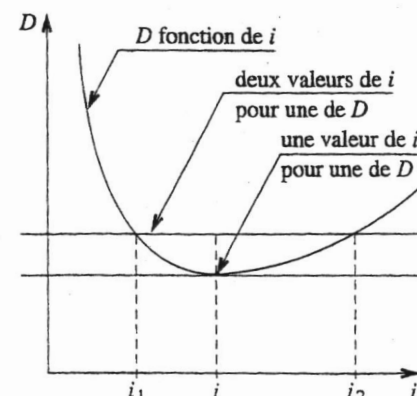
Doc. 6. La présence des deux prismes permet d'obtenir une image non renversée.



Doc. 7. Déviation vers la base. La déviation  $D$  est d'autant plus importante que la longueur d'onde est faible. Sur ce schéma, les déviations sont exagérées par rapport à la réalité.



Doc. 8. Pour  $i$  donné, déviation des rayons en fonction de  $\lambda$ .



Doc. 9. Il existe un extrémum de déviation pour une valeur de l'angle d'incidence  $i$ .

## MEMO PRISME

Utilisons les lois de DESCARTES :

$$(1 - \sin^2 i) \left(1 - \frac{\sin^2 i'}{n^2}\right) = (1 - \sin^2 i') \left(1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}\right)$$

et développons :  $\sin^2 i \left(\frac{1}{n^2} - 1\right) = \sin^2 i' \left(\frac{1}{n^2} - 1\right)$ ,

soit :  $(n^2 - 1)(\sin^2 i - \sin^2 i') = 0$ .

Dans les domaines de variation des angles  $i$  et  $i'$  physiquement accessibles, la solution est  $i = i'$ ; la relation (4) donne donc :

$$i = i' = i_m = \frac{D_m + A}{2} \quad \text{et} \quad r = r' = \frac{A}{2}.$$

La relation (1) donne alors  $\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right)$ .

Donnons le tableau de variation de  $D$  (doc. 10) :

$i$	$i_0$	$i_m$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dD}{di}$	$-\infty$	0	+
$D$	$i_0 + \frac{\pi}{2} - A$	$2i_m - A$	$i_0 + \frac{\pi}{2} - A$

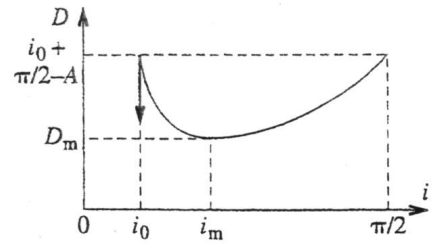
Doc. 10. Variations de  $D$  en fonction de l'angle d'incidence  $i$ .

Cette étude nous permet de tracer la courbe de déviation pour un prisme d'angle  $A$  et d'indice  $n$  donnés (doc. 11 et 12).

Lorsque l'angle d'incidence  $i$  varie de  $i_0$  à  $\frac{\pi}{2}$ , la déviation passe par un minimum  $D_m$  vérifiant la relation :

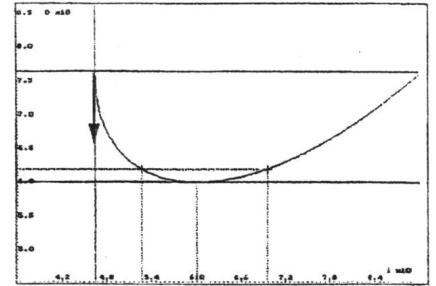
$$\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right).$$

Au minimum de déviation, le tracé du rayon lumineux est symétrique par rapport au plan bissecteur de l'angle du prisme (doc. 12).

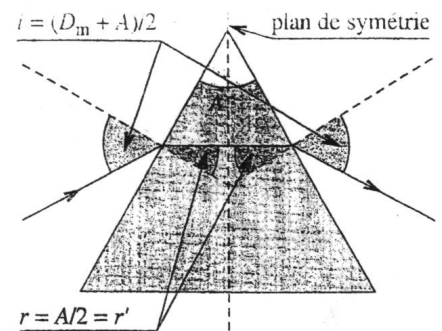


Doc. 11. Lorsque  $D = D_m$ , alors :

$$i = i_m = \frac{D_m + A}{2}.$$



Doc. 12. Courbe de déviation pour  $n = 1,732$  et  $A = 60^\circ$ .



Doc. 13. Disposition géométrique des rayons au minimum de déviation.

## Application 2

1) Montrer que la connaissance de la propriété de symétrie du document 13, représentant le prisme au minimum de déviation, permet de retrouver très rapidement la relation liant  $D_m$ ,  $A$  et  $n$ .

2) Calculer les angles d'incidence  $i_m$  et de déviation  $D_m$  pour un prisme d'angle au sommet de  $60^\circ$  et d'indice  $n = 1,6$ , puis  $n = 1,732$ .

1) La symétrie assure  $i = i'$  et  $r = r'$ .

Or :  $D = i + i' - A$  et  $A = r + r'$ ,

donc :  $i = i' = \frac{D_m + A}{2}$  et  $r = r' = \frac{A}{2}$ .

Les angles  $i$  et  $r$  étant liés par  $\sin i = n \sin r$ ,

nous en déduisons  $n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$ .

2)  $n = 1,6$ ,  $i_m = 53^\circ 08'$  et  $D_m = 46^\circ 16'$  ;  
 $n = 1,732$ ,  $i_m = 60^\circ 00'$  et  $D_m = 60^\circ 00'$ .

Remarque : L'angle d'incidence  $i_m$  est très souvent voisin de  $60^\circ$  pour les prismes utilisés en travaux pratiques.